12. évfolyam szakgimnázium, I. forduló

pontozási útmutató

1. Hány oldalú az a szabályos sokszög, melynek 117-tel több átója van, mint oldala? Számítsuk ki a sokszög területét, ha az oldala 12 cm hosszúságú!

Megoldás:

Egy szabályos n oldalú sokszög átlóinak száma $\frac{n(n-3)}{2}$ (1 pont)
A feladat szövege alapján: $\frac{n(n-3)}{2} = n + 117$, ahonnan (2 pont)
$$n^2 - 5n - 234 = 0$$ (1 pont)
Az egyenlet megoldásai: $n_1 = 18,\ n_2 = -13$ (2 pont)
Mivel $n > 0$, ezért csak a 18 a megoldás. (1 pont)
Az egy oldalhoz tartozó középponti szög 20°: (1 pont)
Így a középponti háromszög magassága: $m = 6 \cdot tg80^o \approx 34\ cm$. (1 pont)
A sokszög területe: $T = 18 \cdot \frac{12}{2} \cdot 34 = 3672\ cm^2$. (1 pont)
Összesen: **10 pont**

2. Mely valós számokra értelmezhető a következő kifejezés:
$$lg(x^2 - x - 6) + lg(16 - x^2)\ ?$$

Megoldás:

Logaritmusát a pozitív számoknak értelmeztük, így
$$(x^2 - x - 6) > 0 \text{ és } (16 - x^2) > 0$$ (2 pont)
A másodfokú polinomok gyökei: $x_1 = -2, x_2 = 3;\ x_3 = -4, x_4 = 4$ (2 pont)
Az első egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $x < -2$ vagy $x > 3$. (2 pont)
A második egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $-4 < x < 4$. (2 pont)
A kifejezés értelmezési tartománya a fenti megoldáshalmazok metszete:
$$D =]-4; -2[\cup]3; 4[.$$ (2 pont)
Összesen: **10 pont**

3. Lali leírta egy lapra azokat a háromjegyű természetes számokat, melyek hárommal osztva kettő maradékot adnak. A leírt számok közül Lili letörölt kettőt, így a lapon maradt számok átlaga 549,5 lett. Melyik két számot törölte le Lili?

Megoldás:

Lali által leírt számok olyan számtani sorozat elemei, melynek első eleme a 101, az n-edik eleme a 998. (2 pont)
$998 = 101 + (n-1)3$, ahonnan (1 pont)
$$n = 300.$$ (1 pont)
A 300 háromjegyű szám összege: $S = \frac{101+998}{2} \cdot 300 = 164850$. (2 pont)

Lili elvett két számot, a megmaradt 298 szám átlaga 549,5, így ezek összege:
$298 \cdot 549{,}5 = 163751$. A két összeg különbsége a Lili által elvett két szám összege: 1099. (2 pont)

Mivel 1099 egyenlő számsorozat első és utolsó elemének összegével, így Lili 150 számpárt vehetett el, melyekre teljesül, hogy $a_k + a_{301-k} = 1099,\ k = 1, \ldots, 150$. (2 pont)

Összesen: 10 pont

4. Oldjuk meg a racionális számpárok halmazán a következő egyenletet:

$$(x^2 - 4x + 6)(3y^2 - 12y + 17) = 10\ .$$

Megoldás:

Határozzuk meg a baloldalon álló kifejezések értékkészletét. (1 pont)

$$(x^2 - 4x + 6) = (x - 2)^2 + 2 \geq 2 \quad \text{(2 pont)}$$

$$(3y^2 - 12y + 17) = 3(y^2 - 4y + 4) + 5 = 3(y - 2)^2 + 5 \geq 5 \quad \text{(3 pont)}$$

Az első tényező legalább 2, a második tényező legalább 5, így szorzatuk legalább 10. (2 pont)

A szorzat pontosan akkor 10, ha az első tényező 2, a második tényező 5.
Ami pontosan akkor teljesül, ha $x = 2,\ y = 2$. (2 pont)

Összesen: 10 pont

5. Lalinak 16 egyforma méretű üveggolyója van, melyek közül 9 piros, 4 fehér, a többi zöld. A golyókat két olyan dobozban tartja, melyek közül az egyikbe 6, a másikba 10 golyó fér. Lili, aki Lali húga egy alkalommal a 16 golyót az összes lehetséges módon elhelyezte a két dobozban és azokat leírta. Hány lehetőséget írt le Lili?

Megoldás:

A zöld golyók száma 3. (1 pont)

Vizsgáljuk a hat golyót tartalmazó dobozban a fehér és zöld golyók számát.
Ha ezek együttes száma kevesebb, mint hat, akkor ezt piros golyókkal pótoljuk.
Ebben a dobozban lévő golyók fajta száma egyértelműen meghatározza a másik dobozban lévő golyók fajta számait. (1 pont)

A fehér golyók száma lehet: 0, 1, 2, 3, 4, ez 5 lehetőség. (2 pont)

A zöld golyók száma lehet: 0, 1, 2, 3, ez 4 lehetőség. (1 pont)

Ez összesen $5 \cdot 4 = 20$ lehetőség. (1 pont)

Ebből a 20 lehetőségből a $4 + 3 = 7$ nem lehet (2 pont)

Tehát Lili összesen 19 elhelyezési lehetőséget írt le. (1 pont)

Összesen: 10 pont

6. Két dobozban 6-6 egyforma golyó van. Az első dobozban lévő golyók 1-től 12-ig a páratlan számokkal, a második dobozban lévő golyók 2-től 12-ig a páros számokkal vannak megszámozva. Minden golyón egy sorszám van. Mindkét urnából kiveszünk *n* darab golyót, és áttesszük a másik dobozba. Legyen P_n annak a valószínűsége, hogy ekkor a golyókra írt számok összege a két dobozban egyenlő! Mennyi P_1 és P_2?

Megoldás:

Az 1. dobozban lévő golyók sorszámainak az összege $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$. (1 pont)

A 2. dobozban lévő golyók sorszámainak az összege: $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 42$. (1 pont)

A 2. dobozban az összeg 6-tal több, mint az elsőben, tehát az áttevés után az egyenlőség akkor valósul meg, ha mind a kettőben 39 lesz a golyók sorszámainak összege. (2 pont)

Tehát az egyes dobozokból kivett golyók sorszámai különbségének 3-nak kell lennie. (1 pont)

Ez 1-1 kivett golyó esetén megvalósulhat, ha az áttett golyókon lévő számok 1-4, 3-6, 5-8, 7-10 vagy 9-12. Ez 5 eset. (2 pont)

Az összes lehetőség száma $6 \cdot 6 = 36$, tehát $P_1 = \frac{5}{36}$. (1 pont)

2-2 áttett golyó esetén a két-két kivett szám összege páros, ezek különbsége is páros, így a 3 nem állhat elő. (1 pont)

Tehát ez nem valósulhat meg, vagyis $P_2 = 0$. (1 pont)

Összesen: 10 pont